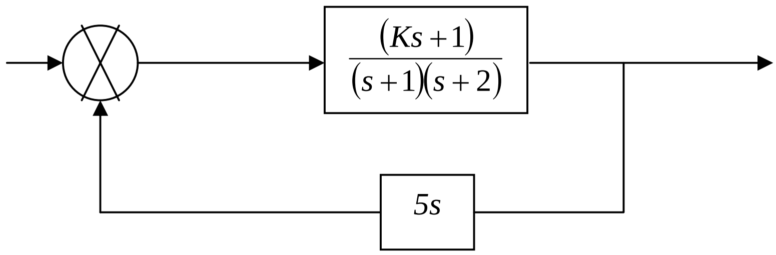
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Para el sistema mostrado en la Figura 1 estudie el comportamiento del sistema los distintos valores de *K*. Diga que valor de K hace que el sistema sea más rápido posible, sin oscilaciones. ¿ Cuál es ese valor de tiempo?



.

Figura 1. Sistema

Solución:

La función de lazo cerrado de éste sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{Ks+1}{(s+1)(s+2)+(Ks+1)5s} = \frac{Ks+1}{s^2+3s+2+5Ks^2+5s} = T(s)$$

$$T(s) = \frac{Ks+1}{(1+5K)s^2+8s+2}$$

Los sistemas de 2do orden como el propuesto, pueden ser de tres tipos:

- Sistemas Sobreamortiguados ($\xi>1$)
- Sistema Críticamente Amortiguados ($\xi=1$)
- Sistemas Subamortiguados ($0<\xi<1$)

Sabemos que la ecuación característica es:

$$(1+5K)s^2+8s+2=0 \Rightarrow s^2+\frac{8s}{(1+5K)}+\frac{2}{(1+5K)}=0$$

que puede ser expresada como: $s^2+2\xi Wns+Wn^2=0$

Por lo que dependiendo del valor de K obtendremos distintos valores de ξ y de *Wn*, ya que:

$$\frac{8}{(1+5K)}=2Wn\xi \quad (1) \qquad\qquad \frac{2}{(1+5K)}=Wn^2 \quad (2)$$

1. Caso ξ=1 $\Rightarrow$ $\frac{8}{(1+5K)}=2Wn$ $\qquad$ $\frac{2}{(1+5K)}=Wn^2$

Con lo cual tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas Wn y K, resolviéndolo:

$$\frac{4}{(1+5K)}=Wn \Rightarrow \frac{2}{(1+5K)}=\frac{16}{(1+5K)^2} \Rightarrow 2\cdot(1+5K)=16 \Rightarrow (1+5K)=8$$

Finalmente: K=7/5=1.4 para ξ=1.

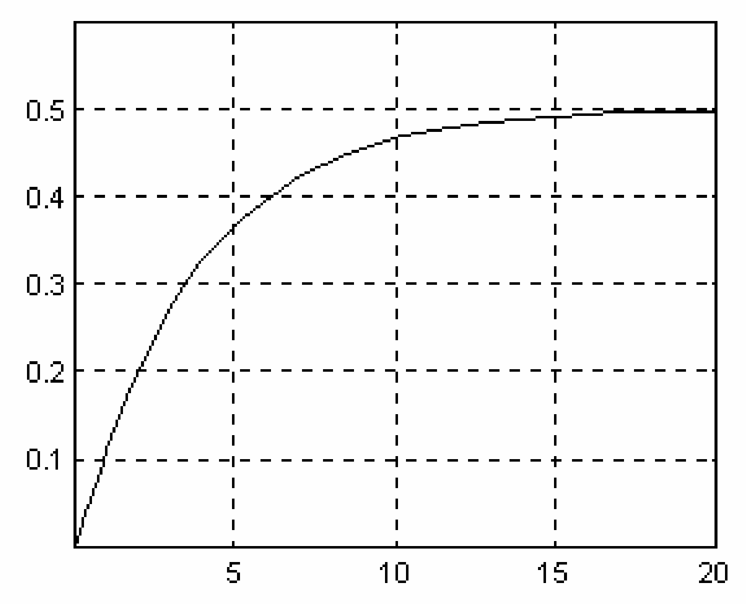
¿ Qué pasa cuando aumentamos o disminuimos el valor de K?

Trabajando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos una expresión para ξ en función de K:

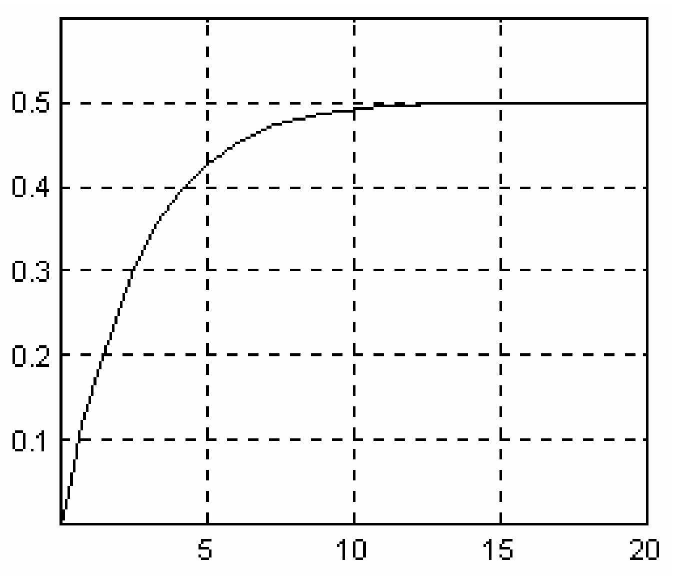
$$\xi=\frac{4}{\sqrt{2(1+K)}}$$

Por lo tanto:

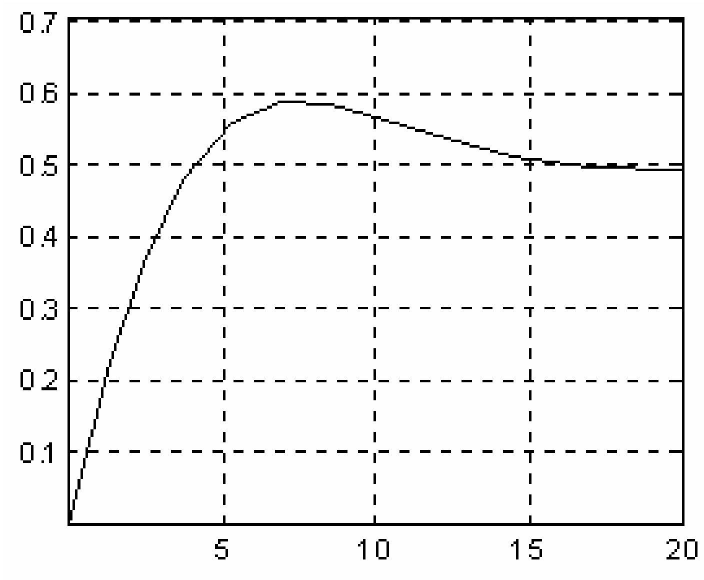
K>1.4	ξ Disminuye (0<ξ<1)	Sistemas Subamortiguados
0<K<1.4	ξ Aumenta (ξ>1)	Sistemas Sobreamortiguados



Respuesta temporal del sistema de segundo orden sobreamortiguado
(K = 0.25 y ξ > 1)



Respuesta temporal del sistema de segundo orden críticamente amortiguado
(K = 1.4 y ξ = 1)



Respuesta temporal del sistema de segundo orden subamortiguado
(K = 3.5 y 0 < ξ < 1)

PROBLEMA 2

A partir de la Figura 2 determine los valores correspondientes a ξ y Wn, para así poder escribir una función de transferencia de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Wn^2}{s^2 + 2\xi Wns + Wn^2}$$

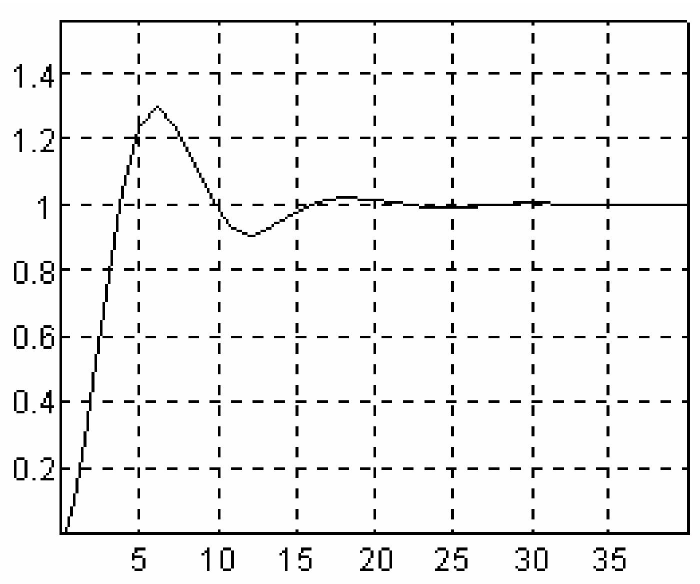


Figura 2. Identificación a partir de la respuesta temporal de un sistema

Solución:

De acuerdo con las expresiones de máximo pico:

$$Mp = \frac{C(t)_{Mp} - C(t)_{EdoEst}}{C(t)_{EdoEst}} = \frac{1.3 - 1}{1} = 0.3 \quad (1)$$

$$Mp = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2)$$

De la expresión (2) podemos calcular ξ a partir del valor obtenido en (1).

Igualando ambas expresiones:

$$Ln\,0.3 = \frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -1.2039 \Rightarrow \xi = 0.3579$$

Ahora con la ecuación de tiempo de pico hallamos *Wn*:

$$tp = \frac{\pi}{Wn\sqrt{1-\xi^2}} \qquad Wn = \frac{\pi}{tp\sqrt{1-\xi^2}} = 0.5607$$

Finalmente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(0.5607)^2}{s^2 + 0.4014s + (0.5607)^2}$$

PROBLEMA 3

Dado el sistema cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 3 se pide:

- Mediante que factor debe alterarse la ganancia del amplificador Ka para que el sistema pase de un coeficiente de amortiguamiento de ξ=0.2 hasta ξ=0.6
- Mediante que factor debe alterarse la ganancia del amplificador Ka para que el sobreimpulso que originalmente es de 80% se reduzca a un 20%

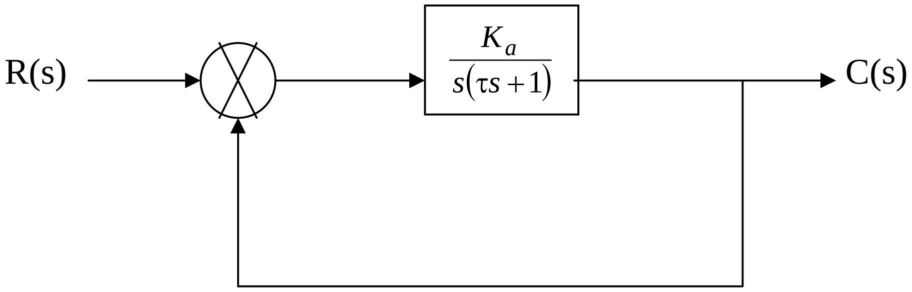


Figura 3. Diagrama de bloques del sistema.

Solución

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_a}{s(\tau\, s+1)+K_a}=\frac{K_a}{\tau\, s^2+s+K_a}=\frac{\frac{K_a}{\tau}}{s^2+\frac{1}{\tau}s+\frac{K_a}{\tau}}=\frac{Wn^2}{s^2+2\,\xi\, Wn+Wn^2}$$

Por lo que igualando a los últimos miembros de la expresión anterior:

Parte I:

a.
$$\frac{1}{\tau} = 0.4\,Wn \Rightarrow Wn\,\tau = 2.5 \Rightarrow Wn = \frac{2.5}{\tau} \Rightarrow Wn^2 = \frac{6.25}{\tau^2}$$
$$\frac{K_a}{\tau} = Wn^2 \Rightarrow \frac{6.25}{\tau^2} = \frac{Ka_1}{\tau} \Rightarrow Ka_1 = \frac{6.25}{\tau} \qquad (1)$$

b.
$$\frac{1}{\tau} = 1.2\,Wn \Rightarrow Wn\,\tau = 0.833 \Rightarrow Wn = \frac{0.833}{\tau} \Rightarrow Wn^2 = \frac{0.6944}{\tau^2}$$
$$\frac{K_a}{\tau} = Wn^2 \Rightarrow \frac{0.6944}{\tau^2} = \frac{Ka_2}{\tau} \Rightarrow Ka_2 = \frac{0.6944}{\tau} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2): $\frac{Ka_1}{Ka_2} = \frac{6.25}{0.6944} = 9$

Por lo que finalmente:

$$Ka_2 = \frac{1}{9} Ka_1$$

Parte II

$$Mp = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad\qquad Ln\,Mp = \frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

c. Mp = 0.8 $\Rightarrow$ ξ = 0.071

$$\frac{1}{\tau} = 0.142 \cdot Wn \Rightarrow Wn\,\tau = 7.042 \Rightarrow Wn = \frac{7.042}{\tau} \Rightarrow Wn^2 = \frac{49.59}{\tau^2}$$
$$\frac{K_a}{\tau} = Wn^2 \Rightarrow \frac{49.59}{\tau^2} = \frac{Ka_3}{\tau} \Rightarrow Ka_3 = \frac{49.59}{\tau} \qquad (3)$$

d. Mp = 0.2 $\Rightarrow \xi = 0.456$

$$\frac{1}{\tau} = 0.912\,Wn \Rightarrow Wn\,\tau = 1.0965 \Rightarrow Wn = \frac{1.0965}{\tau} \Rightarrow Wn^2 = \frac{1.202}{\tau^2}$$

$$\frac{K_a}{\tau} = Wn^2 \Rightarrow \frac{1.202}{\tau^2} = \frac{Ka_4}{\tau} \Rightarrow Ka_4 = \frac{1.202}{\tau} \qquad (4)$$

Dividiendo (4) entre (3): $\dfrac{Ka_4}{Ka_3} = \dfrac{1.202}{49.59} = 0.0242$

Por lo que finalmente: $Ka_4 = 0.0242 Ka_3$